HIRAM FINANCE

Prise en compte de l'effet de dilution des BSA

Antoine Conze
Hiram Finance
antoine.conze@hiram-finance.com

Introduction Cette courte note présente la prise en compte de l'effet de dilution dans la valorisation de bons de souscription d'actions (BSA), intégrant la prise en compte des BSA au passif de la firme émettrice. En effet, une approche parfois retenue consiste à considérer un modèle naïf dans lequel le prix de l'action subit une dilution lors de l'exercice du BSA, due à la différence entre le prix de l'action juste avant l'exercice et le prix d'exercice du BSA, et à appliquer le coefficient de dilution à la valeur obtenue par la formule de Black et Scholes pour une option sur action [1]. Cette approche erronée provient d'un modèle qui oublie de comptabiliser les BSA au passif de la firme, et s'est probablement répandue du fait d'une mauvaise interprétation du modèle de Galai et Schneller [2] (voir par exemple Crouhy et Galai [1]).

Notations

- N actions composent la capitalisation de la firme ;
- M BSA de maturité T et prix d'exercice K ;
- S_t = prix de l'action à t ;
- W_t = valeur du BSA à t ;
- V_t = valeur de la firme à t **hors BSA** ;
- $X_t = V_t/N$ = valeur de la firme à t **hors BSA** par action existante.

Analyse à $t < T$: en l'absence de BSA, le bilan de la firme donnerait $NS_t = V_t$ ou de manière équivalente

$$S_t = \frac{V_t}{N} = X_t. \tag{1}$$

En présence de BSA, on a, **puisque les BSA doivent être comptabilisés au passif de la firme,**

$$NS_t + MW_t = V_t$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{S_t + \frac{M}{N}W_t = \frac{V_t}{N} = X_t}. \tag{2}$$

Analyse à $t = T$: chaque BSA donne droit à l'achat au prix d'exercice K d'une action nouvellement émise de prix S_T. Le BSA est exercé lorsque $S_T > K$, et son payoff est donc

$$\boxed{W_T = \max(S_T - K, 0)}. \tag{3}$$

- si les BSA sont exercés (cas $S_T > K$) : la firme émet M nouvelles actions et reçoit le montant MK. Le bilan s'écrit alors

$$(N + M)S_T = V_T + MK$$

1. Voir par exemple www.investopedia.com/articles/trading/10/warrants.asp « Because of the dilution that warrants represent, the value of that call needs to be divided by (1 + q)... ».

ou de manière équivalente

$$S_T = \frac{V_T}{N+M} + \frac{M}{N+M}K = \frac{N}{N+M}X_T + \frac{M}{N+M}K; \tag{4}$$

– si les BSA ne sont pas exercés (cas $S_T \leq K$) : le bilan s'écrit

$$NS_T = V_T$$

ou de manière équivalente

$$S_T = \frac{V_T}{N} = X_T. \tag{5}$$

Notons que l'on a bien

$$NS_T + MW_T = V_T$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{S_T + \frac{M}{N}W_T = \frac{V_T}{N} = X_T}. \tag{6}$$

La relation entre prix de l'action, valeur du BSA, et valeur de la firme hors BSA est bien la même à $t < T$ (équation (2)) et à $t = T$ (équation (6)). Le prix de l'action **ne subit donc pas de saut de dilution lors de l'exercice du BSA**. Ce point est important car une approche erronée serait de considérer que le prix de l'action subit une dilution lors de l'exercice du BSA à $t = T$. Cette erreur est parfois faite et provient de ce que l'analyse pour $t <$T oublie de comptabiliser le BSA au passif de la firme.

Pour terminer l'analyse, on ré-écrit (4) et (5) de manière plus compacte comme

$$S_T = X_T - \frac{M}{N+M}(X_T - K)\mathbf{1}_{S_T > K}$$

où $\mathbf{1}_{S_T>K} = 1$ si $S_T > K$ et $\mathbf{1}_{S_T>K} = 0$ si $X_T \leq K$. En combinant cette expression avec (3) on ré-écrit alors le payoff du BSA comme

$$\boxed{W_T = \frac{N}{N+M}\max(X_T - K, 0)}. \tag{7}$$

Valorisation du BSA On voit de (3) et (7) que il y a deux manières d'analyser le BSA :

- soit comme une option de type call sur l'action S_T ;
- soit comme $N/(N+M)$ options de type call sur X_T, la valeur de la firme hors BSA par action existante.

Le modèle le plus couramment employé pour valoriser des options est le modèle de Black et Scholes. Celui ci suppose que le prix forward du sous-jacent est un processus Brownien géométrique à volatilité constante. Notons $C(F_t, T-t, K, \sigma, r)$ le prix à t d'un call donné par la formule de Black et Scholes avec F_t le prix forward du t du sous-jacent, T la maturité, K le prix d'exercice, σ la volatilité du sous-jacent et r le taux d'intérêt pour la maturité T.

Valorisation du BSA comme un call classique Si on suppose un modèle de Black et Scholes pour le cours de l'action S_t, de volatilité σ_S, on valorise le BSA comme un call classique, soit [2]

$$\boxed{W_t = C(S_t e^{(r-d)(T-t)}, T-t, K, \sigma_S, r)} \tag{8}$$

2. pour simplifier l'exposition on suppose un taux de dividende constant d conduisant à un prix forward de l'action $S_t e^{(r-d)(T-t)}$.

Valorisation du BSA comme calls sur la valeur de la firme hors BSA par action existante Si on suppose un modèle de Black et Scholes pour X_t, la valeur de la firme hors BSA par action existante, de volatilité σ_X, on valorise le BSA comme $N/(N+M)$ calls sur X_T. En l'absence de dividendes on obtient donc

$$W_t = \frac{N}{N+M} C(X_t e^{r(T-t)}, T-t, K, \sigma_X, r).$$

Reste à déterminer X_t, que l'on obtient par (2), ce qui conduit à

$$W_t = \frac{N}{N+M} C((S_t + \frac{N}{N+M} W_t) e^{r(T-t)}, T-t, K, \sigma_X, r).$$

En présence de dividendes cette relation se modifie en

$$\boxed{W_t = \frac{N}{N+M} C\left(S_t e^{(r-d)(T-t)} + \frac{M}{N} W_t e^{r(T-t)}, T-t, K, \sigma_X, r\right)}. \tag{9}$$

On obtient ainsi une **formule de Black et Scholes modifiée**, dans laquelle la valeur W_t du BSA apparaît **à gauche et à droite de l'équation.** On applique alors une méthode de calcul du zéro d'une fonction, telle que la méthode de Newton, pour obtenir W_t.

Choix du Modèle Le choix de l'une ou l'autre méthode de valorisation dépend de l'estimation de la volatilité.

Pour des BSA nouvellement distribués, l'historique du cours de l'action est hors BSA (équation (1)), et l'estimation de la volatilité historique fournit donc la quantité σ_X. Il convient donc d'appliquer le modèle (9) (valorisation du BSA comme calls sur la valeur de la firme hors BSA).

Pour des BSA existants mais non cotés, avec un historique du cours de l'action depuis l'émission des BSA, on peut soit estimer directement la volatilité historique de l'action qui fournit σ_S et appliquer le modèle (8) (valorisation du BSA comme un call classique), soit appliquer un algorithme itératif qui étant donné une volatilité σ_X permet à partir de l'équation (2) et du modèle (9) (valorisation du BSA comme calls sur la valeur de la firme hors BSA) de reconstruire la série des X_t sur laquelle on re-estime σ_X. Des tests empiriques à partir de données simulées montrent que les deux approches donnent des résultats très proches.

Références

[1] Crouhy, Michel, and Dan Galai. Common errors in the valuation of warrants and options on firms with warrants. *Financial Analysts Journal* 47.5 (1991) : 89-90.

[2] Galai, Dan, and Meir I. Schneller. Pricing of warrants and the value of the firm. *The Journal of Finance* 33.5 (1978) : 1333-1342.